上越数学教育研究，第 23 号，上越教育大学数学教室, 2008 年, pp.21-30.

概念的知識と手続き的知識とから見た比例学習における子どもの知識の形成過程

家内　慧
上越教育大学大学院修士課程 2 年

1.　はじめに

筆者の教育実習の少ない経験の中でも，算数や数学の授業で，自ら課題に取り組んでいるようには見えない子どももいた。子どもは本来，自分のもっている知識をもとに新たな知識を自ら形成するものであろう。まずは知識の形成過程に着目することで，どのような知識が形成されていくかを明らかにする必要がある。

Hiebert & Lefevre(1986)は，知識の二つのタイプとして概念的知識と手続き的知識があるとし，かいつまんで言えば，概念的知識を幾つかの知識が結びついた蜘蛛の巣状のもの，手続き的知識を問題解決における一連の規則と，特徴づけている。算数・数学教育において概念的知識と手続き的知識に係る研究は，しばらく途絶えたかに見えたけれども，近年 Star(2005)や，Baroody et al.(2007)などによって，再び発展させられてきている。

本研究の目的は，概念的知識と手続き的知識とからみた比例学習における子どもの知識の形成過程を明らかにし，今後の授業改善の示唆を得ることである。

2.　概念的知識と手続き的知識についての先行研究

2.1.　スケンプによる理解

知識の形成の研究をするにあたって，スケンプを避けて通ることはできないので，まずスケンプによる理解について述べる。

スケンプ(1992)は，理解を関係的理解と道具的理解いう言葉によって説明している。スケンプ(1992)によれば，関係的理解とは，行っていることもその理由も，どちらもわかっているということであり，道具的理解とは，規則を身につけてそれを用いる能力，いわゆる理由なき規則を用いる能力であるとし，道具的理解よりも関係的理解の重要性を主張している。

スケンプ(1973)は，「あることを理解することは，それを適切なシェマに同化することを意味する。」としている。そして，シェマには，既存の知識を統合することや，新しい知識を獲得するうえでの心的な用具となるという二つの主要な機能があるとしている。

ここで使われているシェマとは，心的構造に対して与えられた心的な語である。この言葉は，数学に関する複雑な概念構造を意味するだけではなく，感覚－運動的活動を協応させる単純な構造をも含んでいるが，スケンプ(1973)は，主として抽象的な概念のシェマについて論じている。

2.2.　概念的知識と手続き的知識

2.2.1.　概念的知識と手続き的知識について

Hiebert & Carpenter (1992)では，概念

的知識と手続き的知識という視点から，知識の形成過程を説明している。知識の形成過程は，大きくは Hiebert & Carpenter (1992)の理解論の中で，いわゆる理解過程を読み捉えることによって展開されている。

Hiebert & Carpenter (1992)は，理解することを以下のように定義している。

> 知識情報が内部のネットワークの一部であるならば，数学的な考え，手順または事実は理解される。より詳しく言えば，心的表象が表象のネットワークの一部であるならば数学は理解される。理解の程度は関連の数と強さで測定される。それがより強いかより多数の関連で既存のネットワークに結ばれているならば，数学的な考え，手順または事実は完全に理解される。
>
> (Hiebert & Carpenter, 1992, p.67)

筆者は，Hiebert & Carpenter (1992)のいう，表象のネットワークの形成は，スケンプのいうシェマの形成と同様のものと考え得る。スケンプ(1992)のいう関係的理解と道具的理解を，Hiebert & Carpenter (1992)のいう概念的知識と手続き的知識と対応させることができる。

Hiebert & Lefevre (1986)は，概念的知識と手続き的知識を以下のように定義している。

> 概念的知識は，関係に富んでいる知識であり，概念的知識は知識が結びついた蜘蛛の巣状のものと考えることができる。また，概念的知識は結合や分離という関係による知識情報のネットワークとして考えることができる。知識情報がいくつかのネットワークと結合できるように，関係は事実や命題に広がる。
>
> 手続き的知識は，二つの異なる特徴によって作られている。手続き的知識の特徴の一つは，数学における形式的な言語または記号表現から成り立っている。第二の手続き的知識の特徴は，数学の問題を解決するために使われる規則，アルゴリズムまたは手続きから成り立っている。おそらく学生たちが持っている手続きの多くは，記号を操作するために規定された鎖状になっている。
>
> (Hiebert and Lefevre, 1986, pp.3-4)

Hiebert & Lefevre (1986)は，概念的知識を，十進数における加法減法を小数の場面について説明し，手続き的知識を小数の筆算の場面について説明している。概念的知識は同じ位の数を，足したり引いたりできるということを，整数の範囲から小数の範囲まで広げることができたということから理解を進めたということができ，手続き的知識は小数の乗法を整数の乗法の手続きによって数だけ計算し，最後に小数点を置くという手続きを加えることによって作り出されたということができる。

Star(2005)は，概念的知識と手続き的知識を，表層的，深層的という二つの視点を設けて説明し，深層的な手続き的知識について次のように述べている。

> 手続きについての表層的な知識だけをもつ人は，たぶん，標準的な技能を使用すること以外に頼ることができない。それによってなじみの薄い問題を解決する時に，より効率的でない解決，または解決できないことにさえ至るかもしれない。しかし，より適応範囲が広い解答者－手続きの深い知識を持つもの－は，最も適する問題の状態，または，目的を解決することの解法を作り出すために，練習させられたもの以外の技能を使用することで，この手続き的領域によって彼や彼女の方法を導くことができる。
>
> (Star, 2005, p.409)

Star(2005)は，深層的な手続き的知識を一次方程式の例から説明している。$2(x+1)+3(x+1)=10$ という一次方程式を解く場面で，この一次方程式は$(x+1)$をまとめて考えていく方法がある。$(x+1)$を X とおくと，$2X+3X=10$ とすることができる。ここ

で X についての一次方程式を解き，その後 X に(x＋1)を代入して x について解く。このような場合，一次方程式の解法としての標準的なアルゴリズムにのみ依存した手続きになっていない。このような手続きでは標準的な，もしかしたら練習したもの以外の技能を使用しているので，深層的な手続き的知識である。

Baroody et al.(2007)は，Star(2005)に批判的立場を示しながら，概念的知識と手続き的知識について以下のように述べている。

> 私たちの展望と Star(2005)の主な違いは，(相対的に)表層的な手続き的知識と(相対的に)表層的な概念的知識が独立して存在するかもしれないことである。しかし，(相対的に)深層的な手続き的知識は(相対的に)深層的な概念的知識なしで，また逆に，(相対的に)深層的な概念的知識は(相対的に)深層的な手続き的知識なしで存在することができない。
>
> (Baroody et al. 2007. p.123)

例えば 58＋72－28 のような計算をする場合，標準的なアルゴリズムは左の数の組から順に計算をしていくことである。こうした手続きは，加法減法の標準的なアルゴリズムであるといえるので，表層的な手続き的知識である。この計算には別の効率的な方法がある。58－28 を先に計算し，30 を導いてから 72 を加えるという方法である。これは標準的なアルゴリズムに依存したものになっていない。つまり，これは深層的な手続き的知識といえる。

我が国では，礒田(1999)が概念的知識を意味とし，手続き的知識を手続きとして次のように述べている。

> 意味とは「~は・・・である」と表せる内容であり，定義や性質，そして根拠を基にした推論などが該当する。
>
> 手続きとは「~ならば・・・しなさい」と表せる内容であり，やり方や書き方，形式，そして無意識に進む計算，暗算などが該当する。(礒田, 1999, pp.9-10)

そして，意味と手続きが同じとみなせるのは，それを知っている者や解釈力の長けた者，例えば教師だけであるとしている。礒田(1992)は意味と手続きは立場によって捉え方が変わるものであるとしている。

2.2.2. 大きい考えについて

Baroody et al.(2007)は，大きい考えというものを提唱し以下のように説明している。

> 大きい考え(複数の概念，手続き，問題の内部あるいは領域や原則を超えたものにすら関わる概念)は，概念と手続きの両方の深い理解を成し遂げることに必要である。
>
> (Baroody et al. 2007. p.125)

大きい考えとは，いわば，概念的知識と手続き的知識を結びつけるような考えであり，これらの知識の下層にあり働く考えである。意味としては，基礎となるような考えとして捉えることができる。

さらに，Baroody et al.(2007)は大きい考えの特徴として次のように述べている。

> 大きい考えは，孤立した手続き，定義，などの一連としてよりむしろ結合や構築されたものとして，数学的な知識を見ることに子どもたちを誘う。特に，手続きと概念の表面上の特徴を見て，同じ下にある構造を持つものとして知識の多様な面を見ることに子どもたちを誘う。手短にいえば，大きい考えは，うまく関係していて，よく体系化されていて，抽象的で，正確な知識(概念的知識と手続き的知識の深い理解)をつくることに必要であると考える。(Baroody et al. 2007. p.126)

Baroody et al.(2007)は，概念的知識と手続き的知識をはっきりと区別することは難しいものがあり，それらは，大きい考えという概念を中心に結びついているものであると指摘している。筆者も Baroody et al.(2007)のいう大きい考えが，知識の結びつきに重要な役割をしていると考える。

3. 子どもたちの知識の形成過程を捉えるための視点

本研究では，Baroody et al.(2007)に沿い，概念的知識を，事実と原則についての知識とし，手続き的知識を規則，方略，アルゴリズムを完了するための精神的な行動または操作とであるとするものの，ここで事実と原則についての知識とは知識の断片，すなわち知識情報のつながりからなるネットワークを含むものである。

3.1. 知識を結びつけることと知識を形成すること

概念的知識と手続き的知識とを結びつけることの必要性が従来からいわれてきたが(例えば，礒田, 1999)，この結びつけは知識情報の直列的なネットワークと蜘蛛の巣状のネットワークを結びつけることによって，新たなネットワークを形成することと考えることができる。この結びつけによって知識自体の変容が起こる。この変容に，概念的知識あるいは手続き的知識のいずれかを基として知識の再形成を行うのかという点があり，スケンプ(1992), Hiebert & Carpenter(1992)は概念的知識の形成に重点をおき，Star(2005)やBaroody et al.(2007)は手続き的知識の重要性を再検討している。本研究では，大きい考えを知識情報のネットワークを形成するために関与する知識やその働きであると捉え，概念的知識，手続き的知識及び大きい考えという見地から子どもの知識の形成過程を分析する。

4. 比例学習や比例と関連する学習についての先行研究

4.1. 比例学習の先行研究

日野(2002)は，比や比例の内容の重要性について以下のように述べている。

> 比や比例の内容は，日常生活における重要性はいうまでもなく，科学の分野での重要性，進んだ数学の理解の支柱としての重要性等から，数学教育において重要な位置を占めている。(日野, 2002, p.3)

日野(2002)は，比例を扱う授業でなされている様々な営みを探ることによって，子どもの認知の様相を捉えている。その結果，児童がかき表す特定の表記によって機能的変化が見られ，その表記は児童によって異なったと述べている。

石田(2002)は，比例学習においての一般化の問題における解決過程を「変化の規則性に気づく」,「構造を捉える」,「簡単な場合で捉えた構造を式表示できる」,「その式を大きな項数の場合に一般化できる」の四段階として捉え，小学４年，５年，６年の子どもの一般化の問題における解決の困難性が，一般化の問題の解決過程のどこにあるかを調査研究の結果に基づいて考察している。その結果，いずれの学年も「構造を捉える」段階に困難性を持っていると述べている。このときの構造とは，数量関係を反映した図の仕組みであるとしている。

木村(2001)は，比例学習において，簡単な場合で考える方略を持っていない子どもに，図及び図の構造を表した式を与えることが困難性の解消に有効であることを指摘している。それによって「簡単な場合で考える方略の欠如」,「図をもとに式をつくる方略の欠如」,「図を構造的に捉えることができない」の三要素を解消することができる可能性を示した。しかし，木村(2001)の手立てによっても，全ての子どもの困難性を解消できたわけではなく，追加すべき別の手立てを考えることが今後の課題として残されている。

大谷ら(2002)は，中学校との接続性を配慮した比例の学習指導を提言することを目的とし，ヴィゴツキー派の文化－歴史的活動理論に基づいて，比例を用いた活動を検討している。

木谷(2001)は，円周率を導出する活動が，数学的な考え方である関数の考えを育成することができる活動になっているという立場に立ち，円周率という教材の価値を検討している。その中で，円周と直径の関係に気づくためには，「一定の関係があるだろう」という関数の考えの基礎となる推測が必要であることを指摘している。

4.2. 割合の先行研究

土屋（2002）は，児童が割合を理解することを次のように述べている。

> ２量のＡとＢという関係で表された割合は，A'と B'，A"と B"……というようにたくさんの同じ割合の関係を作れないと理解したとはいえないと考える。また A→A'，B→B"の間の比例関係を見抜いて初めて理解できると考える。いわば２量を用いて同値の比をつくることができなければならないと思う。
>
> （土屋. 2002. p.30）

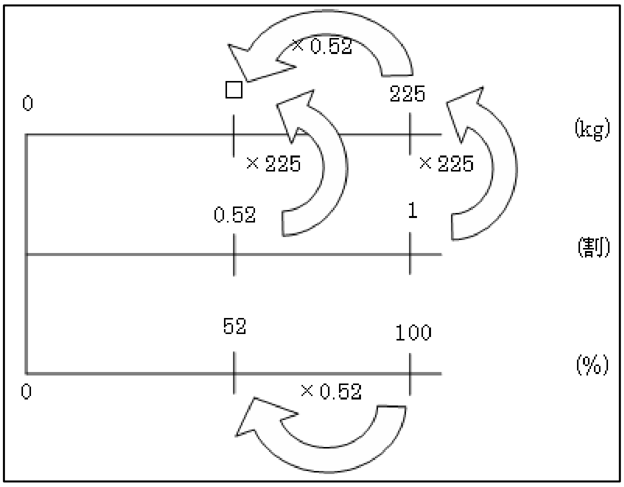

図 4.2.1.　土屋(2002)での数直線の使用例.

土屋(2002)は，比例の見方を用いて，数表や数直線による意味づけを行う割合指導を提案している。まず異なる数量の割合を比較する問題から導入し，数表を用いて同じ割合をつくる活動を行っている。そこでは，数直線上に数量関係を記述し，倍関係を把握してから，立式の根拠とする児童の例があげられている(図 4.2.1)。

中村(2002)は，小数の乗法についてであるが，割合の理解の難しさの要因の一つに，割合は２量の関係を表すため，数の相対的な見方が必要になることがあるとし，次のように説明している。子どもたちが，実生活の中で２量を比較する際には差を使っての比較をすることが多い。子どもたちが倍による比較(相対的な見方)をするのは，２倍，３倍などの小さい数の整数倍や，0.5倍(半分)などの比較的簡単な計算によってできる場合ばかりである。そのため，２量の関係が小数倍や分数倍のように簡単に計算できない場合になると，容易にできる差を使っての比較を行ってしまう。つまり，割合学習において２量の関係の相対的な見方をすることを学習することが求められているといえる。

このように割合など，関連する他の単元を学習するためにも比例関係を見抜くことが重要であるといえる。

5.　授業の参与観察の分析と考察

5.1. 授業の参与観察の概要

2007 年３月６日から３月 12 日までの間に，新潟県にある住宅地にほど近い小学校４年生の児童 21 名からなる二クラスを三つに分けた少人数学級の一つでの授業を参与観察した。授業は，担任の教諭が行った。参与観察を行ったのは，ともなって変わる量の全単元五時限である。ビデオ撮影，観察者による筆記記録によりデータ収集をした。これを基に，それぞれの授業時間のプロトコルを作成し,教師と児童の発話とプリントの記述より，概念的知識と手続き的知識及び大きい考えがどのように形成されていくかも，特に抽出した四名の子どもたちを中心に分析し，考察した。抽出児童を匿名で，EO，KN，NN，SM と呼ぶ。

参与授業で設定した問題場面は次の通りである。

時	問題場面
1	縦が４cm，横が１cm の長方形の，横の長さを２cm，３cm･･･とのばしていったときの，横の長さと縦の長さの関係を考える。
2	ストローを使って正方形を一列にならべていくとき，正方形の数とストローの本数の関係について考える。
3	紙を一方向に何度も折り重ねるとき，折った回数と折り目の数の関係について考える。
4	１秒間に２cm ずつ進むカメが歩き出してから，10 秒たつと何 cm 進むか。また，100 秒たつと何 cm 進むか。
5	まとめテスト

5.2. 授業の参与観察の分析と考察

5.2.1. EO の活動の分析と考察

EO は第１時のグラフを描く場面で，折れ線グラフの手続き的知識を使用した。それは第２時，第３時でも同様である（図 5.2.1.1）。

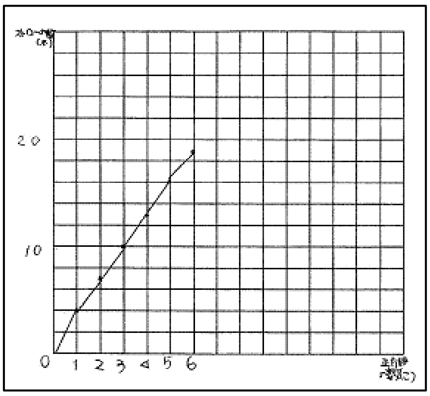

図 5.2.1.1. 第２時の EO のグラフ.

しかし，第４時ではグラフを描く際に一直線で線を引いていた（図 5.2.1.2）。これまでの学習によってカメの進んだ時間と距離の変化の割合を伴う概念的知識が十分に形成され，単に点を結ぶという折れ線グラフの手続き的知識から，その変化の割合が一定である場合はグラフが一直線であることを伴う概念的知識を形成した。

これは第１時と第２時でグラフにして気付いたこととして，「直線でかける」などの記述があることから前時までで形成していた概念的知識を完成させたものである。このとき手続き的知識と概念的知識から新たな概念的知識を形成しているので大きい考えの働きがある。

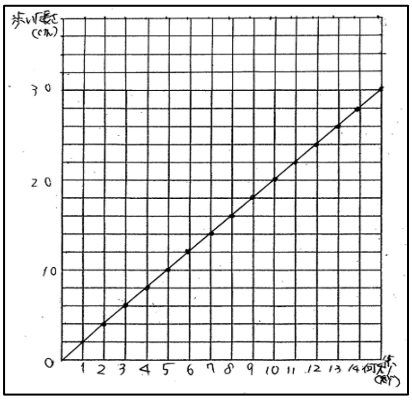

図 5.2.1.2. 第４時の EO のグラフ.

また，第２時の感想の「YY のはつげんしていた式が，とても分かりやすくて，かんたんにかけたりもするので，これからもその式をつかいたいです」や，第４時の感想の「10 でも 100 でもなんでも，同じやりかたでできて，・・・SH さんの考えがわからなかったので，勉強になりました」という記述から，相互作用によって，概念的知識の形成があったといえる。

EO の場合は自分自身で問題に取り組み概念的知識を形成する場面よりも，他者との相互作用や，板書されたものから概念的知識を形成する場面の方が多く見られた。

5.2.2. KN の活動の分析と考察

KN は，表にしたとき第１時では横の長さが１cm 長くなるときの面積，第２時では正方形が一つ増えるときのストローの本数というような，変化の仕方に着目していた。グラフにしたとき第１時では横の長さが１cm 長くなるとき面積は４cm² ずつ増える，第２時では正方形が一つ増えるときストローの本数は三本ずつ増えるというように，変化の仕方が一定であることと，グラフが

直線で描けることに注目していた。

第２時で KN は，単に点を結ぶという折れ線グラフの手続き的知識から，その変化の割合が一定である場合は，グラフが一直線であることを伴う概念的知識を形成した。このとき，手続き的知識と概念的知識から新たな概念的知識を形成しているので，大きい考えが働いている。

第３時でも，折った回数が一回増えるとき折り目の数は２倍＋１で増えるという，変化の仕方に着目し概念的知識を形成した。

次は第４時で KN がグラフから答えを説明しようとしている場面である。

KN	折れ線に表してみました。えーっと，表を，これを書いたんで，1 秒に 2 cm ずつってことはわかってたから，ひとつのメモリを，２cm と考えて，簡単にやりました。
T	ちなみに，答えはどこですか？
KN	はい，ここです。
T	グラフでいうと答えは？
KN	このへん。
T	ここを見てなんで 20 ってわかるの？
KN	ここ。
T	あーそうね。わかった？でもひとつ悩みがあるんだよね？100 秒の時は？どこが困ってるの？
KN	書けない。
T	どうして？
KN	こんなにやってらんない。

KN カメの歩いた時間が 10 秒の時の歩いた距離を求める際に，1 秒のときは 2 cm 進むという自分でつくった表から形成した概念的知識によって説明できているが，カメの歩いた時間が 100 秒になると，そのときの歩いた距離については説明できていない。このことから，KN にとって 100 という数値の大きさに難しさがあり，概念的知識の形成に影響していると考えられる。

第５時では，比例の問題であるまとめテスト１の問１，問２は正答を導き，説明もできている。しかし，問３は「(5＋3)×100＝800」という誤った式を立てている。これは問題を読んで，単純にバネの長さの５と伸びの３を足し，それから重さの 100 をかけるという式を立てたのかもしれない。また，問４でも「(20＋4)×5＝120」と誤った式を立てている。これも問３と同様に単純に水の温度の 20 と加熱の４を足し，それから時間の５をかけるという式を立てたのかもしれない。もしくは，既習事項の，括弧のあるかけ算の手続き的知識が負の影響をもたらしたのかもしれない。しかし最終的にまとめテスト２の問２で正しい式と答えが導けている。

5.2.3. NN の活動の分析と考察

NN は，第１時で表からは横の長さが１cm 増えるとき面積は４cm^2 ずつ増えるという変化の仕方に係る概念的知識を素早く形成した。さらに「４×□」という式も記述している（図 5.2.3.1)。

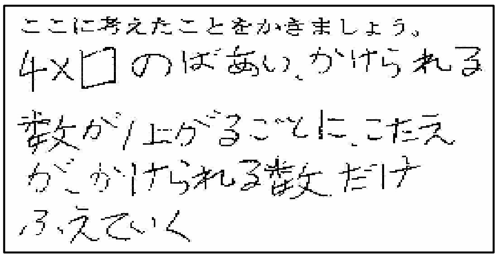

図 5.2.3.1.　第１時の NN の記述.

第２時では自ら，「正方形の数×３+１＝ストローの本数」と記述していることから，正方形の数とストローの本数の一次関数の概念的知識を形成している（図 5.2.3.2)。

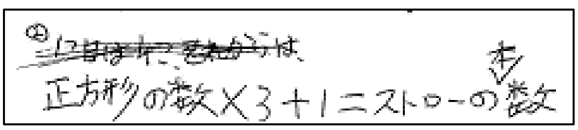

図 5.2.3.2.　第２時の NN の記述.

第４時では「10 倍していく」という発言から，表やグラフをかく際に，10 とばしの表でも関係は変わらないという新たな概念的知識を形成している。特にグラフを描く際によく表れている（図 5.2.3.3)。このと

き大きい考えの働きがあると考える。このときはまだ時間だけを 10 とばしにして考えている。また，NN が概念的知識を形成するなかで,「秒数×秒速＝きょり」という記述のように言葉の式で表されたものがあった(図 5.2.3.4)。

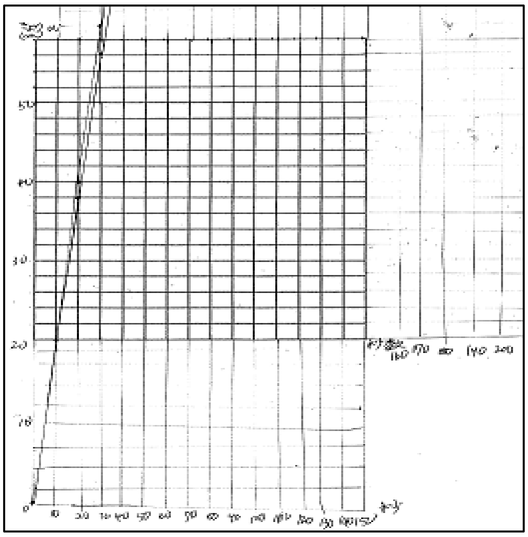

図 5.2.3.3. 第 4 時の NN のグラフ.

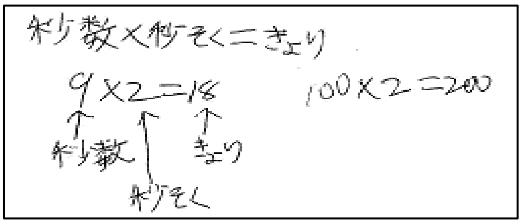

図 5.2.3.4. 第 4 時の NN の記述.

NN はカメの進む時間が 10 秒のとき，カメが進んだ距離を求めるのにこの言葉の式で説明している。NN の考えた言葉の式は，これまで形成してきた概念的知識を運ぶものであると見ることができる。またこれは，NN がカメの進む時間が 100 秒のときでも適用しているように，適用可能なものである。このことから，この式を圧縮された概念的知識であると捉える。

第 5 時のまとめテストでは，すべての問題において言葉の式を立てて説明している。問 3 については，バネの図を描いている。しかし，それまで学習してきた表やグラフを使ってはいない。この時, もしかしたら，NN の概念的知識は，表や，グラフに頼らなくても様々な文脈の問題に適用できるものになっていたのかもしれない。

5.2.4. SM の活動の分析と考察

SM は，第 1 時で表から横の長さが 1 cm 増えるとき面積は 4 cm^2 ずつ増えるという概念的知識を形成した。グラフでは KN 同様，横の長さが 1 cm 増えるとき面積は 4 cm^2 ずつ増えるという変化の仕方が一定であるという概念的知識を直線によってあらわしている。これら概念的知識の形成には大きい考えの働きがある。

次は第 2 時で, YY が考えを発表しその考えを確かめる相互作用が行われている場面である。

YY	9ことか作るとしたら，
T	9こ，はい。
YY	9とその使う 3 こを，かけて三九 27 で，27 に，27 こ使うことになる。
T	ふーん。KN'さんどう？もし正方形を 9 こ作るのであれば，かける 3 して 27 本になるんだって。この式はでもわかったでしょ？わかるね？でも 27 本かどうか，ほんとかどうかはどう？
KN	やってみないと。
…	・・・
T.C	1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，13，14，15，16，17，18，19，20，21，22，23，24，25，26，27，・・・28？
SM	あれ？
T	あれ？28 本だなぁ。
SM	たす。
KN	たす 1。
EO	たす 1 する。
KN'	たす 1 だ。
T	たす 1 するの？
T	たす 1 する。そすと 28。あー28 だ。おー，なるほどね。おー。ちょっと待てよ，9×3，式書いとこう。27。で 27＋1 が 28。ねっ。えー9 このときは，28 本ね。なるほど。
T	ちなみに YY さんが言ったのは，9 このときしか

	使えないの？
SM	え？使えるよ。
C	使える。
SM	２こでも･･･。
T	おー，SM さん２こでやってみて。はい，何？２こだとどうなる？
SM	えっと。
T	２こだと？
SM	２×３。
T	２×３。
SM	で，答えが６で，たす１。

その後 SM は YY の考えをもとに伴って変わる二つの数量の関係を式にして考えることによって概念的知識を形成しようとしている。

次は第３時で，SM と NN との相互作用が行われている場面である。

NN	ま，全部奇数だけどさ。このあとはわかるよもう，これで。
SM	６回で？
NN	６が 63 だから，これで 127 かな。
SM	おれも 31 本。まじだ。
SM	何本だっけ？63。
SM	５回が 31 で，たしたら 31 たす 31 だから 62 だしな。
…	・・・
SM	わかった？
NN	わかった。全部２倍＋１がみえる。
SM	２倍＋１。
SM	ほんとだ。これと同じ数字，これに。
NN	だろ？
SM	４のとき２倍。15 の２倍は・・・30。ほんとだ。すげぇ。まじすげぇ。

SM は自分だけでは折った回数を一回増やすと折り目の数が２倍＋１で増えていくという概念的知識を形成することはできなかった。しかし，NN の２倍＋１という助言をもとにして，図 5.2.4.1 の，「１回目とすれば１×２＋１＝２回目の折り目になる」という記述することで，２倍＋１の関係になっていることを確認している。これは SM が NN との相互作用によって概念的知識を形成した場面である。

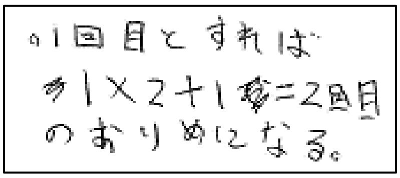

図 5.2.4.1. SM の第３時の記述.

第４時では，SM は 10 秒のときだけでなく，100 秒のときも同じ関係が成り立つという概念的知識を形成しているために，言葉の式の秒数のところに 100 をいれて計算していると考える。また SH の発言から，10 倍するという意見について考えることで概念的知識をさらに豊かにしている。第５時ではまとめテスト１の問１，問２は表をかいて関係を説明している。しかし，問３，問４，問５は表にしていない。もしかしたら，SM は概念的知識が形成されたことにより，表や，グラフに頼らなくても様々な文脈の問題を解決できるのかもしれない。

全５時限を通してみてみると，SM は式を重要視しているように見ることができる。

6. まとめ

本研究では，子どもの知識がどのようにして形成されていくのかを明らかにするために，比例学習の単元において授業の参与観察を行い，得たデータを基に表れる知識の形成過程に焦点を当て，分析と考察を行った。その結果，次の四つのことが明らかになった。

一つ目に，子どもたちは，表やグラフにあらわした知識情報や，教師や他の子どもたちとの相互作用によって得た知識情報を既有の概念的知識と結びつけ，結びつきをより多くすることによって概念的知識を形成している。新しく結びつく知識情報は，かたまりとして，すなわち，概念的知識や手続き的知識として，子どもに既有の概念的知識や手続き的知識と

結びついていく。つまり，大きい考えには，既に持っている概念的知識に新たな知識情報を結びつける働きがある。子どもたちは自分の持っている概念的知識に新たな知識情報を結びつけることで,概念的知識を発展させる。

二つ目に，十分な概念的知識が形成された子どもたちは,言葉の式のようなものとして，様々な文脈の問題に適用できるような，圧縮された概念的知識を形成する。つまり，大きい考えには言葉の式のような圧縮された概念的知識の組み込みを促すような働きがある。子どもたちは,発展させた概念的知識を,様々な文脈の問題に適用できるような概念的知識として形成する。

三つ目に，指数関数などのように問題がもっている関係の難しさや，数値の難しさ，また，これまでの学習であまり使用してこなかった単位などの難しさが，子どもたちの概念的知識の形成に影響を及ぼした。

四つ目に，教師や他の児童，あるいは板書との相互作用は，子どもが概念的知識を形成する際に影響を及ぼしている。

引用･参考文献

Baroody, A. J., Feil, Y. and Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*, 115-131.

Hiebert,J. & Carpenter,T. (1992). Learning and teaching with understanding. D.A.Grouws (ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.65-97). Macmillan Publishing Company.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*, 404-411.

R.R.スケンプ．(1973)．数学学習の心理学．(藤永保，銀林浩訳)．新曜社．

R.R.スケンプ．(1992)．新しい学習理論にもとづく算数教育―小学校の数学―．(平林一榮監訳)．新曜社．

石田淳一.(2002)．小学生の「一般化」問題の解決における困難性．日本数学教育学会誌，*84*(6), 23-31.

礒田正美，原田耕平.(1999)．生徒の考えを活かす問題解決授業の創造－意味と手続きによる問いの発生と納得への解明－．明治図書．

大谷実，中村雅恵.(2002)．中学校との接続性を配慮した比例の学習指導―文化-歴史的活動理論に基づく教授実験のデザイン―．日本数学教育学会誌，*84*(6), 11-22.

木谷隆人．(2001)．関数の考えを育成する円周率の指導について―円周と直径の関係に注目させる円盤転がし実験の実施―．日本数学教育学会誌，*83*(2), 2-9.

木村理奈子．(2001)．一般化問題の解決における「簡単な場合で考える」方略使用の困難性に関する調査結果．日本数学教育学会誌，*83*(4), 2-9.

土屋利美.(2002)．比例の見方を用いた「割合」の指導実践．日本数学教育学会誌．*84* (8), 30-37.

中村享史．(1996)．小数の乗法の割合による意味づけ．日本数学教育学会誌，*78*(10), 7-13.

日野圭子．(2002)．授業における個の認知的変容と数学的表記の役割：「単位あたりの大きさ」の授業の事例研究を通して．数学教育学論究 *79*, 3-22.